

## Einführung in die Differenzialrechnung

Folgende Situation: Zwei Leute machen eine Wette: Wer ist auf eine kurze Distanz schneller?

– Anton fährt mit dem Auto und Robert rennt so schnell er kann.

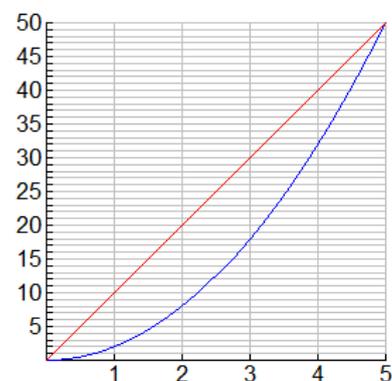
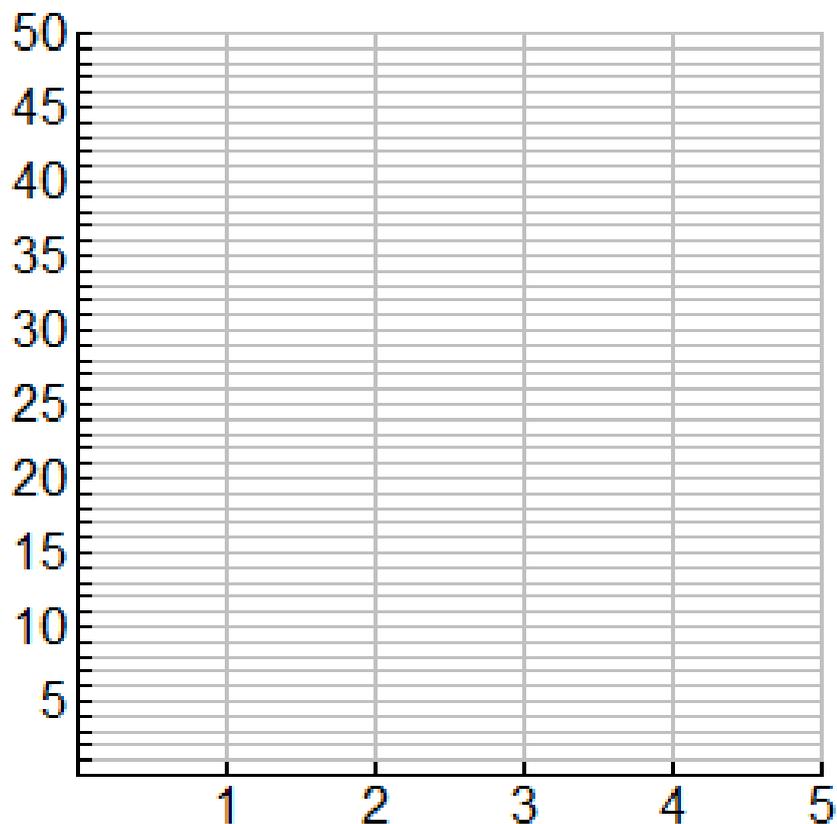
Robert darf gleich mit Maximalgeschwindigkeit von  $36 \text{ km/h} = 10 \text{ Meter pro Sekunde}$  starten, Anton aber mit Null Geschwindigkeit.

Die Wegstrecken ergeben sich für den Läufer Robert als folgende Funktion:  $y = 10 \cdot x$  und für Anton als beschleunigte Funktion:  $y = 2 \cdot x^2$

(x ist die Zeit in Sekunden, y der Weg in Metern)

Zeit–Wegstrecke–Tabelle für Robert:		Zeit–Wegstrecke–Tabelle für Anton:	
Zeit x (in sec)	Weg y (in m)	Zeit x (in sec)	Weg y (in m)
1 s	10 m	1 s	2 m
2 s		2 s	
3 s		3 s	
4 s		4 s	
5 s		5 s	
6 s		6 s	

Diese Werte kann man in ein Diagramm eintragen:



Wie man sieht, überholt der Autofahrer den Läufer erst nach 5 Sekunden.

Jetzt aber zu dem Thema **Geschwindigkeit**. Welche Geschwindigkeit hat der Läufer und der Autofahrer von Sekunde zu Sekunde?

Dazu müssen wir die Definition der Geschwindigkeit ansehen: Wegdifferenz dividiert durch Zeitdifferenz, hier für jeweils eine Sekunde Differenz

Dazu müssen wir die Tabellen von vorhin ergänzen

**Zeit–Wegstrecke–Tabelle für Robert:**

Zeit x (in sec)	Weg y (in m)	Wegdifferenz	Zeitdiff	Wegdifferenz/ Zeitdiff
1 s	10 m			
2 s	20 m	10 m	1 s	10 m/s
3 s	30 m	10 m	1 s	10 m/s
4 s	40 m	10 m	1 s	10 m/s
5 s	50 m	10 m	1 s	10 m/s

**Zeit–Wegstrecke–Tabelle für Anton:**

Zeit x (in sec)	Weg y (in m)	Wegdifferenz	Zeitdiff	Wegdifferenz/ Zeitdiff
1 s	2 m			
2 s	8 m	6 m	1 s	6 m/s
3 s	18 m	10 m	1 s	10 m/s
4 s	32 m	14 m	1 s	14 m/s
5 s	50 m	18 m	1 s	18 m/s

Die Geschwindigkeit des Läufers Robert ist immer gleich, die Geschwindigkeit beim Autofahrer Anton nimmt immer mehr zu von 0 auf, 6,10,14,18 m/s (18 m/s sind 65 km/h)

Hier haben wir die Durchschnittsgeschwindigkeiten in einem Zeitintervall von einer Sekunde berechnet.

Wir haben berechnet:

Geschwindigkeit = Wegdifferenz durch Zeitdifferenz (**Differenzenquotient**)

Wie sieht das aus, wenn man die Zeitdifferenz variiert und die Werte nach einer Sekunde mit den späteren Werten vergleicht. Wie anzunehmen ist, bleibt die Geschwindigkeit beim Läufer Robert auch immer gleich 10 m/s. Wie sieht es aber für den Autofahrer aus?

Zeit–Wegstrecke–Tabelle für Robert:					Zeit–Wegstrecke–Tabelle für Anton:				
Zeit x (in sec)	Weg y (in m)	Wegdifferenz -10m	Zeitdiff -1s	Wegdifferenz/ Zeitdiff	Zeit x (in sec)	Weg y (in m)	Wegdifferenz	Zeitdiff	Wegdifferenz/ Zeitdiff
1 s	10 m				1 s	2 m			
2 s	20 m	10 m	1 s	10 m/s	2 s	8 m	6 m	1 s	6 m/s
3 s	30 m	20 m	2 s	10 m/s	3 s	18 m	16 m	2 s	8 m/s
4 s	40 m	30 m	3 s	10 m/s	4 s	32 m	30 m	3 s	10 m/s
5 s	50 m	40 m	4 s	10 m/s	5 s	50 m	48 m	4 s	12 m/s
					1,1 s	2,42 m	0,42 m	0,1 s	4,2 m/s
					1,01 s	~2,04	~0,04	0,01 s	~4 m/s

Je näher man die Zeit an die 1. Sekunde heranrückt, desto näher geht die Geschwindigkeit auf die 4 m/s zu. Das könnte die **Momentangeschwindigkeit** sein – und das wird mathematisch der **Differenzialquotient**:

Momentangeschwindigkeit = Grenzwert von  $\frac{\text{Wegdifferenz}}{\text{Zeitdifferenz}}$  für immer kleinere Zeiten

aus der Formel für die Wegstrecken  $y = 2 \cdot x^2$  wird allgemein die Formel für die Geschwindigkeiten  $y' = 4 \cdot x$  durch die Bildung des Differenzenquotienten und dann den Grenzwert des Differenzialquotienten – das ist die Beweistechnik für die Ableitung von Funktionen.